x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$	0	$+$	
$f'(x)$	0	↗	
$f(x)$	0	↗	

D'après ce tableau, 0 est un minimum absolu de f sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ donc

$\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $f(x) \geq 0$ et par suite : $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x$.

• Montrons que $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\cos x \leq 1-\frac{x^2}{\pi}$:

$$\cos x \leq 1-\frac{x^2}{\pi} \Leftrightarrow \cos x+\frac{x^2}{\pi}-1 \leq 0$$

Soit $g(x)=\cos x+\frac{x^2}{\pi}-1$, $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$

$g'(x)=-\sin x+\frac{2x}{\pi}$; g' est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$

$g''(x)=-\cos x+\frac{2}{\pi}$

$g^{(2)}$ est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ donc $g^{(3)}(x)=\sin x$

x	0		β		$\frac{\pi}{2}$
$g^{(3)}(x)$	0	$+$			
$g^{(2)}(x)$	$\frac{2}{\pi}-1$	$(-)$	0	$(+)$	$\frac{2}{\pi}$
$g'(x)$	0	$(-)$	$g'(\beta)$	$(-)$	0
$g(x)$	0	↘		↘	

d'après le tableau des variations de g , 0 est un maximum absolu sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ donc $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\cos x \leq 1-\frac{x^2}{\pi}$.